数学的道具としての概念形成を目指した教材構成に関する研究
～「単位量あたりの大きさ」を例として～

新堀　栄

1　はじめに

算数において一般に「単位量あたりの大きさ」の学習は指導するのが難しい教材といわれている。筆者の教職経験を振り返ってみても、児童に興味をもたせようとして、実際的な問題を用意した時、それを解決しようと子供たちから出されるアイデアと筆者の意図する割合の考えとが分離するという経験をした。

そこで、本稿では児童が問題解決の文脈の中で、問題を解決する最も適切な数学的道具として割合概念を構成することが重要であると考え、そうした視点から授業を構成するための観点とそれを実現するための方法を実証的に明らかにすることを目的とした。

2　数学的道具としての概念とその形成について

平林(1985)は、数学的道具としての「割合の概念形成」についての立場を述べている。２節ではこの立場を明らかにし、本稿では基本的にこの立場に立つこととする。

2.1　数学的概念の本性

平林は、「割合という数学的概念は、どのように人間において形成されるのか」という認識論から以下のように述べている；

「数学的概念も、何らかの矛盾・葛藤を解消する道具としてつくられてくる。まず問題事態の矛盾・葛藤が明確に浮き彫りにされなければならない。」(p.9)

そして、それを割合で考えたときに数学的道具として生起するための条件として、次の３点が必要であることを述べている。

①異なる２つの量があって、どちらか一方では比べられないという状況があること
②どちらか一方を揃えなければならないこと
③揃える量は任意でよいこと

つまり、数学的概念は「矛盾葛藤を解消する道具」としてつくられること、そして、それを割合で考えたときには上の３つの条件のもとに、割合の概念が数学的道具として形成されるのである。

2.2　道具として概念が生起するための条件「矛盾・葛藤」の観点から

小林（1995）は、子供たち一人一人に学習を成立させるためには、子供たち自らが学習に取り組むという動機、言い換えれば内発的動機付けが必要であり、この内発的動機付けを生起させる要因として認知的葛藤があることを述べている。

また、広岡(1977)は、概念形成における内発的動機を生起させるための葛藤について以下のように述べている。

「内的動機の生起は、いいつめれば、不確定情報にもとづく知的葛藤　conceptual　conflict だといえよう。完結していない不確定な情報を受け取ると、心意の均衡を喪失して、不安定感をもち、不快感にとらわれる。そして、この不確定な情報を、より確定したものに組織したいとの心的動向が生じてくる。これが知的な葛藤であり、いいかえると、学習を引き起こす内的動機である。」(pp.145-146)

つまり、知的な葛藤がないことには、解決

すべき問いも存在しないし、解決しなければならない欲求も沸いてこない。均衡と不均衡をうまく教材の中でつくっていくことの重要性を述べている。

以上のように、子供たちに知識を構成するための授業過程において、いかに「矛盾」を意識させ、知的な「葛藤」を生起できるようにするかが、問題を自分自身の問題と捉え、主体的な学習を成立させるポイントになる。また、こうしたことが道具として概念を生起させるような教材を構成していく上での重要な観点になる。

3 「単位量あたりの大きさ」に関する先行研究

3.1 「単位量あたりの大きさ」の歴史

異種の２量の割合について正式な位置づけが行われているのは、昭和 26 年の中学校高等学校の学習指導要領である。§ 4「比および数量関係」の領域で、小学校での「同種の量についての比の意味の指導」を受けて、「異種の量の比についての理解」を取り扱うことになっている。その時の指導対象は中学１年であった。内容は、人口密度・速さなど、現在小学校で扱われているものと同様である。

その後、「異種の２量の割合」という内容と「単位量あたり」という考え方は、算数では、昭和 33 年の学習指導要領においてはじめて正式の項目としてとりあげられた。

しかし、当時は、「数量関係」の領域で、「割合」として考える面に重点がおかれていた。すなわち、同種の数量の間での比や比率に対して、二つの異なった種類の数量に関しても比例関係に着目するということと、「単位量あたり」の考えを用いることを主なねらいとしていたのである。一方「速さ」も５年で取り扱っているが､学習指導要領の上では、「量と測定」領域であり、まだ、この両者を関係付けることを特にはしていなかった。その後、昭和 43 年の学習指導要領の改訂に当たって、この「異種の２量の割合」は、「量と測定」の領域に移され、いわば、新しい「量」を考える立場に重点をおいて考え、その一環として、「速さ」を位置付けることになったという。この考えは、昭和 52 年及び現行の学習指導要領にも踏襲され、現在も同様である。

3.2 「単位量あたりの大きさ」の単元の意義

児童は５年生までに、量については基本的なものとして、長さ、重さ、時間の他、面積、体積、容積、角などについて学習してきている。中島(1981)は、「長さ、重さなどにしても､先験的に既に存在している対象ではなく、人間が “ながいみじかい ”、 “おもいかるい ” といった事柄を、的確に捉えるものさしとしてつくり出した概念である｡」と述べている。中島は、「ものさし」という言葉を用いているが、ここで取り上げようとする「異種の２量の割合」という考えは、上のようにしてつくった、長さ、重さ、時間といった、いわゆる基本的な量の一つだけでは捉えられない対象を、ある「ものさし」で捉えようとするもので、そのための工夫として、二つ以上のものを組み合わせて、何とか捉えたい、というねらいに立ったものであるといえる。

また、中島(1985)は､「異種の２量の割合」の指導について、次のように述べている。

> 「この指導を、人間がある目的で必要な量を新しく創造していくときの考え方とその体験を得させる重要な機会として見直したい。」（p.2）

中島の主張にあるように「単位量あたりの大きさ」の学習は、「事象を数理的に捉える」という算数科の目標に沿った、創造的な学習をする機会に値することと考える。

3.3 新しい量をつくり出すということの重要性

「単位量あたりの大きさ」の単元で、今現在使われている「速さ」「人口密度」「密度」など、２つの量でつくられている身近な事象を理解する事も小学校算数科における重要な目的の一つであるが、一方で「量と測定」領

域の目標である「新しい量を考える」ということ、つまり「新しい量をつくりだすという創造的な力」こそがこの単元でのもう一つの重要な目的となる。

新学習指導要領でも、そのことが述べられている。中村（1999）は、新学習指導要領算数科の目標と教育課程審議会の答申から、これからの算数教育の理念や授業の方向性を探るキーワードとして、「基礎・基本」「つくり出す」「評価」の３つを掲げ、特に「つくり出す」については、「既知の事柄から未知の事柄を論理的に導くことが創造性の基礎を培うことにつながるはずである」（p.25）と述べている。さらに、新学習指導要領の目標表現を分析し、具体的に以下のような算数の授業が浮かび上がると述べている。

「作業的・体験的な活動を通して基礎的・基本的な知識や技能を身につけ、根拠を明らかにして新しい知識や考えをつくり出し、獲得した知識や考えを日常生活などに活かす」（p.25 下線筆者）

中村が言うように受け身に、知識や技能を学ぶだけではなく、自分で考え、自分の持っている知識を発展させていく能力や態度は、これからの社会を担っていく子供たちには必要であると考える。

3.4 「単位量あたりの大きさ」の実践例からの諸問題

新堀(1999)は、矛盾葛藤を起こし、それを解消する道具として割合を生起させることの難しさを述べ、その実現のための教師の工夫や困難点について、実際の授業を例にして考察した。そこでは、例えば、問題場面によっては、教師と児童の間に意識のずれを生じる可能性があり、「特に面積に当たる量を分離量とすることで、児童が道具として差を生起する可能性があること」など、題材の中で取り扱われている量の大きさや質が子供たちから出されるアイデアに影響を及ぼしていることが問題点の一つの重要な要因となっていることを明らかにした。これらは、扱う量や質に対する子供たちの一定の傾向を示唆しており、これら一定の傾向を把握することが割合の概念へと意図的に導く上で重要であることを示唆した。

4　実態調査に基づく分析と考察

ここでは、3.4 項までの考察をもとに、割合概念を構成する上で不可欠と考えられる矛盾や葛藤を生じさせるのに必要な量に関する一定の傾向を把握するための調査について述べる。

4.1　調査の目的

①先行研究を考察して得られた諸問題を実証的に検討すること。

②道具として概念を形成するための教材構成で重要な事柄についての子供の意識を調査すること。

4.2　調査の概要

4.2.1　調査日時・対象

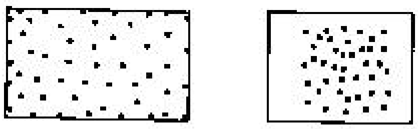
1999 年６月１１日
埼玉県大宮市内の公立小学校５年生
男子１６名、女子１５名　計３１名

4.2.2　調査問題

調査問題１：矛盾葛藤を生起するための図の選定

①視覚によるこみぐあいの判断

あなたが「こんでいるなぁ」と思うプールはどちらですか。

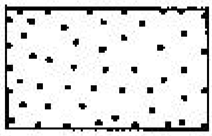


（図１）

本調査問題は、子供たちに導入の図において矛盾葛藤をよりよく生起するためにはどのような図が必要かを探るための調査である。

この場面での矛盾葛藤とは、子供たちが視覚的に「こんでいる」と感覚的に捉えたものが、実は子供たちが最初に着目するだろう「人数」という指標で考えると逆転するような場

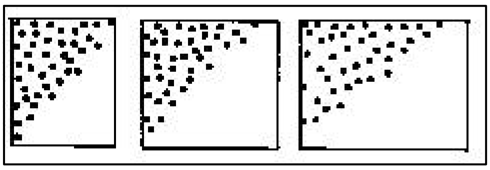
面の設定である。そのため、人数・面積などの情報は与えず、直感で判断させた。



（図２）

子供たちには、２つのプールの図が印刷されているカードを手渡した。

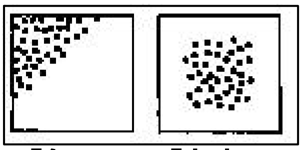
そのカードの左側にはAプール（図２）、右側にはBプールが印刷されている。Aプールと比較させるための



面積50%　面積65%　面積80%

（図３）Bプールの面積

Bプールは面積３種類（図３）、ドットの分布２種類（図４）、ドットの割合４種類（図５）を変えてある。



「角」　「中央」

（図４）固め方

30%　40%　50%　60%

（図５）ドットの分布割合

全ての組み合わせ２４通りのランダムに重ねられたカードを子供たちに手渡し、そのカードを一枚ずつめくらせ、AプールとBプールのうち、こんでいると思う方に○を付けさせていった。また、調査後、休み時間に数人にインタビューを行った。

調査結果（表１参照）は、全体的な傾向として、ドットの分布「角」を変化させても、子供たちのこみぐあいの判断には、ほとんど有意な差が見られなかった。インタビュー調査でも「白い部分がいっぱいあるとすいているように見える」「まず、白い部分に目がいった」という子供たちの判断からすると、ドットが分布していない余白の部分に関係があると考えられる。あまりに、余白の部分が多いと、それをこんでいない部分としてとらえてしまうからである。また、ドットの分布「中央」でも、面積が 80 %になると分布割合 50 %のものを除いて有意な差は見られなかった。これは、面積 80 %では、面積がAプールに近くなり、ドットの分布が粗くなってしまうために両方のプールで極端な違いが出ないためと思われる。

（表１）

【面積８０％】　（表3-3-1）

	分布割合 ３０％	分布割合 ４０％	分布割合 ５０％	分布割合 ６０％
固め方中央	16人 51.6％ 15人 n.s.	23人 74.2％ 8人 ※	26人 83.9％ 5人 ※※	25人 80.6％ 6人 ※※
固め方 角	14人 45.2％ 17人 n.s.	20人 64.5％ 11人 n.s.	20人 64.5％ 11人 n.s.	25人 80.6％ 6人 ※※

【面積６５％】　（表3-3-2）

	分布割合 ３０％	分布割合 ４０％	分布割合 ５０％	分布割合 ６０％
固め方中央	22人 71.0％ 9人 ※	24人 77.4％ 7人 ※※	27人 87.1％ 4人 ※※	24人 77.4％ 7人 ※※
固め方 角	14人 41.9％ 18人 n.s.	13人 48.4％ 16人 n.s.	16人 51.6％ 15人 n.s.	25人 80.6％ 6人 ※

【面積５０％】　（表3-3-3）

	分布割合 ３０％	分布割合 ４０％	分布割合 ５０％	分布割合 ６０％
固め方中央	12人 38.7％ 19人 n.s.	21人 67.7％ 10人 I	26人 83.9％ 5人 ※※	21人 67.7％ 10人 I
固め方 角	10人 32.3％ 21人 I	15人 48.4％ 16人 n.s.	14人 45.2％ 17人 n.s.	16人 51.6％ 15人 n.s.

（注）表の見方

分布割合 ５０％

Bプールを選んだ人数 — 25人 80.6％ — Bプールを選んだ割合

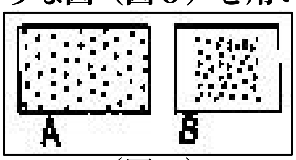
Aプールを選んだ人数 — 6人 ※※ — 同率検定による有意差の判定

「網掛け」有意なもの

※※…1％水準で有意
※…5％水準で有意
I…有意傾向
n.s.…有意でない

次に面積 65 %と 50 %では、ドットの分布「中央」で、ほぼ同じ結果が出た。面積 65 %の分布割合 30 %で有意な結果がでなかったが、それ以外では全て有意な結果となった。

本調査からは、一方を教科書の図のように均等分布した図を用い、もう一方の図において、面積を 50 %から 65 %程度にし、ドットの分布は「中央」にして、ドットの分布割合を 50 %前後にすることで、より多くの子供たちがその図を「こんでいる」と判断する可能性がある。つまり、実際の授業で以下のような図（図６）を用いることで、子供たちは



（図６）

右のプールを視覚的にこんでいると判断することが予想できる。

②視覚と数値による判断

次に、面積・人数とも明らかなときには、図の有無、図の視覚的な変化がこみぐあいの判断にどの程度、影響を及ぼすのかを調べた。

ｉ）面積が同じで人数が違うとき

ア.図がない場合について

Aプール	Bプール
４００㎡	４００㎡
４０人	５０人

Aプールがこんでいると答えた児童２人

Bプールがこんでいると答えた児童 29 **人**

イ.図が均等分布されている場合について

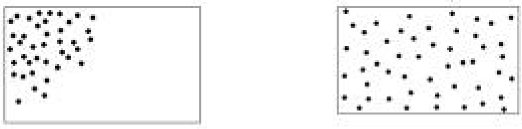
Aプール（40 **人**）　**Bプール**（50 **人**）

Aを選んだ児童０人　Bを選んだ児童 31 **人**

（図７）

ウ.図が均等分布されていない場合について

Aプール（40 **人**）　**Bプール**（50 **人**）



Aを選んだ児童 13 **人　Bを選んだ児童** 18 **人**

（図８）

エ.数値のみと均等分布図におけるＡプール選択人数の相違（①と②の比較）

（表２）

	Aプール	Aプール以外
数値のみ	2	２９
均等分布図	0	３１

（p=0.4918、**p**=n.s.　**両側検定**）

オ.数値のみと不均等分布図におけるＡプールの選択人数の相違（①と③の比較）

（表３）

	Aプール	Aプール以外
数値のみ	2	２９
不均等分布図	１３	１８

（p=0.0022、**p**＜.01　**両側検定**）

ii）人数が同じで面積が違うとき

　ｉ**と同じように、図がない場合・均等分布図・不均等分布図の場合で調査を行った。**

ア.図がない場合

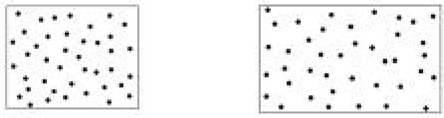
Aプール	Bプール
３００㎡	４００㎡
４０人	４０人

Aプールがこんでいると答えた児童 22 **人**

Bプールがこんでいると答えた児童４人

イ.図が均等分布されている場合について

Aプール（300 **㎡**）　**Bプール**（400 **㎡**）

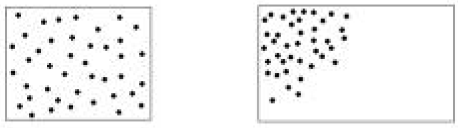


Aを選んだ児童 25 **人　Bを選んだ児童** 4 **人**

（図９）

ウ.図が均等分布されていない場合について

Aプール（300 **㎡**）　**Bプール**（400 **㎡**）



Aを選んだ児童 19 **人　Bを選んだ児童** 12 **人**

（図10）

エ.数値のみと均等分布図におけるＢプールの選択人数の相違（①と②の比較）

（表４）

	Bプール	Bプール以外
数値のみ	4	２７
均等分布図	4	２７

（p=0.9999、**p**=n.s.　**両側検定**）

オ.数値のみと不均等分布図におけるＡプール選択人数の相違（①と③の比較）

（表５）

	Bプール	Bプール以外
数値のみ	4	２７
不均等分布図	１２	１９

（p=0.0402、**p**＜.05　**両側検定**）

ｉ）においては不均等分布図（図８）で、13 **人**（42 %）**の児童が視覚的な影響を受けて、Aプールをこんでいると判断していた。また、ⅱ）図** 10 **では、**12 **人**（39 %）**の児童が同じようにBプールをこんでいるとしていた。**

本調査問題からは、こみぐあいの判断において、視覚的なものが大きく影響を及ぼすことが明らかになった。数値によって容易にこ

みぐあいを判断できるにもかかわらず、図の局所的な部分にとらわれてしまう児童が多い。その一方で、視覚的な影響にとらわれず、ある面積における人数でこみ具合を判断できる子供たちがいることも明らかになった。また、視覚的な影響が、他の指標よりもかなり強いことにも配慮しなければならない。

調査問題２：連続量と分離量の問題による解決の道具としての差の生起について

面積に当たる量を分離量とすることで、児童が道具として差を生起する可能性があることを先行研究との関わりから述べたが、ここでは、面積に当たる量が分離量であるときに、児童は本当に解決の道具として差を生起するのか、また、連続量であるときにはどうなのかについて調査を行った。

①分離量の問題

Aの部屋とBの部屋では、どちらがこんでいると思いますか。

	畳の数	人数
Aの部屋	６枚	５人
Bの部屋	５枚	４人

②連続量の問題

今 800 ㎡の森に 1000 本の杉の苗が植えてあります。もし、森の広さが 200 ㎡だとしたら、その森には何本の杉のなえが植えてあることになるでしょう。

森の面積	なえの数
８００㎡	1000 本
２００㎡	？　本

これらの問題は、児童にとって未習のため、考え方を選択式に回答させたところ、面積に当たる量が分離量であるときには、先行研究で指摘したとおり、77 %の高い割合で差を生起した。一方、面積に当たる量が連続量であるときには、解決で差を選択した児童は半分以下であった。これら２つの調査問題から、面積に当たる量が分離量であるときに、児童が解決の道具として差を生起する可能性が高いと言える。

調査問題３：児童にとってのこんでいる問題場面の把握

あなたが「こんでいるなぁ」と思った場所はどこですか。また、その理由は何ですか。

この調査問題の特徴は、単位量あたりの大きさを学習する以前に子供たちが「こんでいる」ことを感覚的にどのようにとらえているかを把握するものである。つまり、子供たちがインフォーマルにどのような場所でどのようにこんでいると感じているかを把握する調査である。この調査は、子供たちに提起する問題場面の選定に大きく関わる。

調査の結果、子供たちがこんでいると答えた場所は以下のようである。

①プール、②遊園地、③電車の中、
④デパート…

結果より、大多数が大和田公園プールを含めたプールと答えていた。これは、子供たちにとって、調査時期がプール開きを終えた６月ということ、学区内の公営施設であることから、最もこんでいると身近に感じたからであろう。また、こんでいる理由として、ほとんどの児童が「人」の数に着目して理由を挙げていたが、プールでは、公園のように広がりがないため、プールの広さと人についての２量の関係を理由に挙げている児童もいた。

プール以外にもいろいろな場所があがったが、遊園地やデパートなど、家族での外出場面を中心に答えていた。

調査問題４：児童のこみぐあいの判断におけるレディネスについて

次のＡプールとＢプールでは、どちらがこんでいるでしょうか。

①Ａプール　Ｂプール　②Ａプール　Ｂプール
　４００㎡　４００㎡　　４００㎡　４００㎡
　　５０人　　５０人　　　４０人　　５０人

③Aプール	Bプール	④Aプール	Bプール
３００㎡	４００㎡	３００㎡	４００㎡
４０人	４０人	５０人	４０人
⑤Aプール	Bプール	⑥Aプール	Bプール
３００㎡	４００㎡	４００㎡	６００㎡
１００人	２００人	２００人	３００人

本調査問題の特徴は、大きく２点ある。一つ目に、図がある場合の視覚的なこみぐあいの判断との比較のため、二つ目に、Singer とResnick(1992)による調査観点において、子供たちがどの程度こみぐあいの判断ができるかを調査するものである。なお、ここで用いる観点とは以下のものである。

【調査問題[４]①～⑥の観点】

①２つのプールの面積も人数も同じ時にこみぐあいを判断する問題

②２つのプールの面積が同じ時に人数でこみぐあいを判断する問題
（Singer と Resnick のRの正当化）

③２つのプールの人数が同じ時に面積でこみぐあいを判断する問題
（Singer と Resnick のBの正当化）

④片方のプールの面積が小さく人数が多いときにこみぐあいを判断する問題
（Singer と Resnick のCの正当化）

⑤面積から人数を引くと、こみぐあいが同じになってしまう問題。しかし、ここでは比例的推論を用いなければならない。
（Singer と Resnick のSの正当化）

⑥こみぐあいを比べるときに比例的推論を使う問題。

本調査問題での正解率は以下である。

①=正解率９４%、②=正解率９４%

③＝正解率７１%、④＝正解率９０%

⑤＝正解率３５%、⑥＝正解率２９%

本調査問題からは、調査問題１の②との比較から、数字だけの場合にはこみぐあいが正しく判断できても、面積・人数とも同様な場合でも、局所的にドットが固まっている図を出題することで、子供たちのこんでいるという意識に影響を及ぼすことが明らかになった。また、面積も人数もそろっていない時の「こみぐあい」を判断する指標として「面積」よりも「人数」に着目していることが児童の理由より明らかになった。また、未習でもあるが、比例的な考えを適応している子供はほとんどいなかった。その理解も難しいので、授業では、面積が２倍、３倍…（1/2、1/3 …）になるとき、人数も２倍、３倍…（1/2、1/3 …）になるという見方や活動を多く取り入れながら意識させていく必要があると考える。

５　調査に基づく授業の基本方針の導出

5.1本調査から導き出された点

第４項における調査より、授業を構成する上で導き出された点についてもう一度、まとめてみる。それは以下の４点である。

○こみぐあいを比べるときの２つの図において、片方の図にドットを局所的に配置することで、人数や面積に関係なくそちらの方をこんでいると判断する傾向が強いこと。また、こみぐあいの判断がドットの局所的な配置の仕方・面積に対する分布の仕方などにより変化すること。

○こみぐあいを表す、「面積」と「人数」という２つの指標のうち、「面積」に当たる量が「分離量」の時に、子供たちが解決の道具として、「差」を生起する傾向があること。また、「連続量」である時には、その傾向が低いこと。

○子供たちのこみぐあいの判断の基準が「面積」よりも「人の数」によること。

○子供たちにとって、一番こんでいる場所としてあげられたのは子供たちの実態から、「プール」であったこと。

以上の観点をふまえて、具体的な授業構成をする必要がある。

5.2　授業の基本方針

ここでは、5.1 での観点を生かした授業の基本方針を述べる。

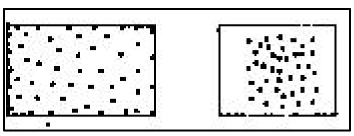
①こみぐあいの場面設定で、「プール」の場面を用いる。

プールの場面を用いる一つ目の理由として、調査から、子供たちにとって最も身近な「こみぐあい」を実感できる場所として挙げ

られたことがある。調査を行った学校では、学区に公営のプールがあり、子供たちはリアリティをもってこんでいると捉えられるだろう。二つ目の理由として、子供たちは、こみぐあいを人数だけでとらえる傾向がある。もし、遊園地やデパートなどの広がりがある場所を題材にすれば、面積を意識させることが難しいと考える。一方、プールでは子供たちにとって広さが実感を持ってとらえられやすいと考える。また、こみぐあいの「面積」にあたる量を「分離量」にすることで、子供たちから解決の道具として「差」を引き出してしまう可能性があることからも、数学的道具の生起という観点から考えると、連続量であるプールは適していると思われる。

②導入で矛盾葛藤を起こすための図として、局所的にドットが固まっている図を用いる

本稿では、導入場面の図において矛盾葛藤を子供たちに生起させる意図から、こみぐあいを判断するための２つの図には、一つは従来のように人を表すドットが「均等化された図」を、もう一つは「ドットを局所的に集中させた図」を用いる。面積と人数が明記されていない場合、この２つの図のうち、子供たちはドットが集中している図を視覚的にこんでいると判断する可能性がある。また、子供たちはこみぐあいを「人数」で判断する傾向があることから、局所的な図のドットの数を少なくしておくことにより、視覚的にはこんでいると判断したプールが、人数という指標で見るとこんでいないことになってしまうことから葛藤が生まれると考える。具体的には図 11 を導入場面で用いる。この２つの図は調査結果から１％水準でＢプールが有意な差をもって子供たちにこんでいると判断されたものである（表１参照）。しかし、割合で見るとＡプール、Ｂプールのこみぐあいが同じになるような設定である。



〈図11〉

このことで、子供たちは、学習が進むうちにＢプールがこんでいるとはっきり言うためには、数量化が必要であるが、そうした数量化をする中で、視覚的には全く違うように見えるこみぐあいが実は割合で見ると同じになることを通して、驚きや感動をもって理解させることを期待している。

③子供たちに面積を意識させる教具を取り入れる

子供たちは、「こみぐあい」を比べるときに「人数」と「面積」の２量のうち、「人数」で判断しようとする傾向がある。また、図がない場合のこみぐあいの判断でも、面積が同じ時に「人数」でこみぐあいを判断する方が、人数が同じ時に「面積」でこみぐあいを判断するよりも容易である。

以上から、こみぐあいでは、子供たちに「面積」を意識させる必要がある。こみぐあいを人数と面積の２量で測ることができる、という知識をクラス全員が視覚的に共有できるために面積を表す枠（教具）を使う。

④面積を公倍数・公約数で揃える活動により、比例的な見方の基礎を養う

調査から、子供たちのインフォーマルな形での比例的な推論が難しいことが明らかになった。

中島(1981)は「異種の２量の割合というのは、二つの異なった量の間に比例関係を前提にして、その比例定数に相当するものを、一つの新しい量として作り出し、目的とすることがらを表すものさしとして用いていこうという考えと見ることができる」と述べている。つまり、こみぐあいは「こんでいるすいている」ということをはっきりとらえるものさしであり、「面積」とその広さでの「人数」、この間に比例関係を前提にして捉えているわけである。しかしながら、従来の指導では、「単位量あたり」の考えに終始してしまい、その結果、ただ単に一方の量を一方の量で割ればいいという理解に陥ってしまう児童も見られた。本研究では、公倍数・公約数で面積

や人数を揃える活動を取り入れることで、面積が２倍、３倍…（1/2、1/3 …）になるとき、人数も２倍、３倍…（1/2、1/3 …）になるという比例の関係の基礎を意識させ、それをもとに「単位量あたり」の考えに結びつけていきたいと考える。

以上、本調査から導き出された４観点の他にも、以下の観点を含めて、授業構成を考えていきたい。

⑤平均の考えを理解するために操作を取り入れる

「単位量あたりの大きさ」の単元では、最初に「平均」について学習する。これはもちろん、その後に学習する「こみぐあい」や「速さ」の学習の根底に「ならす・等速運動」など、この平均の考えが生かされるからである。しかしながら、筆者の経験からも、そのことを意識した指導を行っていなかったり、平均値を求める計算のみに理解の重点を置く傾向があった。石塚(1990)は、平均を用いることの必要性、つまり、なぜならす必要があるのかや、そのよさが明確になるような場面を工夫し、設定することの必要性を述べている。

本研究では平均の考えを意識させるために、ならさなければならない状況を意図的に設定し、人を表すドットをマグネットなどにすることで移動させることができるようにし、平均化の活動を視覚的に、動的に理解させる。また、その際にマスの入った図を使い、平均化しやすいようにする。そして、そのマスのある図によって１あたり量へと結びつける。

6　指導計画・指導案立案

6.1　構成的アプローチの援用

5.2 における授業の基本方針を生かして、具体的な授業案を構成していくための手がかりとして、構成的アプローチ（中原，1995）を援用する。本稿では子供たち自らの素朴な知識を修正・拡張させながら、矛盾・葛藤を乗り越え、概念形成を行うための道具をつくることを意図している。このような点から、ボトムアップ的につくりあげる授業構成による中原の「構成的アプローチ」は代表的なアプローチ法であろう。

6.2　構成的アプローチを用いた授業の構想

ここでは、第５節「調査に基づく授業の基本方針の導出」の 5.2「授業の基本方針」の５観点を構成的アプローチの理論から筆者の授業を具現化する。

（１）意識化

ここでは、観点１により、プールのこみぐあいを題材に使う。問題設定場面で用いる図は観点２によるもので、一つはドットが均等化された図を、もう一つはドットが局所的に固まった図を使う（図 11)。そして、ドットの分布が全く違う２つのプールのこみぐあいについて、「どちらがこんでいるのかはっきりさせよう」という問題解決への意識を高める。

（２）操作化

ここでは、人を表すマグネットの移動を想定した活動を行う。その際、観点３により、割合の見方ができるように面積を意識させるための枠を使う。具体的には、ＡプールとＢプール、それぞれのこんでいる見方の違いを意識させるためにＡプールにはプール全体に広がっているドットを囲むような枠を、そして、Ｂプールには真ん中に固まっているドットを囲むような枠を用意し、児童のこんでいると判断した理由に併せて枠を貼っていく。また、Ｂプールでは、枠をいろいろな場所に動かすことでこみぐあいが変わってしまうことから平均化への活動を促す。

（３）媒介化

ここでは、観点５により、マスの入った図とマグネットを使う。その意図は操作化での平均化させる活動から単位量あたりの考えにつなげるためである。平均化させるために１マスに入るマグネットの数を求める活動が単位量あたりの考えに等しいことを意識させることができると考える。

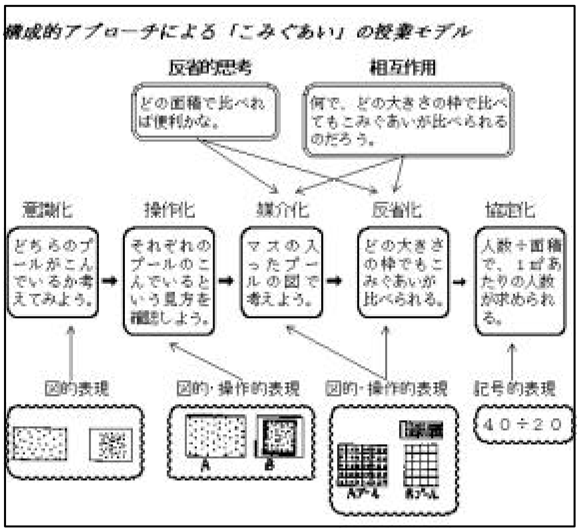
（４）反省化

ここでは、観点４における公倍数、公約数で見る見方を理解させるために、まず、いろいろな面積でこみぐあいを比べさせる。その活動を通して、どの大きさの面積でもこみぐあいが比べられること、そして、面積を２倍、３倍にすると人数も２倍、３倍になっていることをマスの入った図上で枠を操作しながら確認していく。

（５）協定化

ここでは、わり算の式と結びつけながら、単位量あたりで考えるよさを協定していく。

以上から、構成的アプローチの５つの観点で筆者の授業を授業モデルで表すと次のようになる（図 12）。



〈図12〉

7　数学的道具としての概念形成を目指した実験授業

7.1実験授業の概要

1999 年９月、埼玉県の公立小学校５年生 34 名の学級において、「単位量あたりの大きさ」の単元の中の「こみぐあい」について４時間の授業を筆者自身が行った。

【こみぐあい授業計画】

○１時間目　９月２７日
こみぐあいの概念の理解、ドットの分布の仕方によるこみぐあいの変化

○２時間目　９月２８日
均等化することの意味、こみぐあいが人数÷面積で求められること

○３時間目　９月２９日
人口密度についての理解

○４時間目　１０月１日
まとめ・確認問題を解く

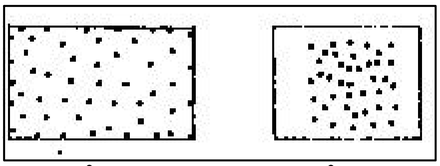
なお、「平均」と「速さ」については時間の関係から学級担任が授業を行った。記録は、ＶＴＲ２台とＡＴＲ１台で行い、これらのデータを分析・考察した。

7.2　授業の考察と分析

7.2.1　授業を構成していく局面と手だてについて

7.2.1.1　平林の観点①と②の実現について

平林の観点①を実現させるためには、２つのプールにおけるこみぐあいを比べる導入場面において、Ａプールは人を表すドットが均等分布されている図を、Ｂプールはドットが一箇所に固まっている図（図 11 再掲）を設定した。そして、Ｂプールは、Ａプールに比べ人数・面積ともに数値を小さく設定した。（子供たちに数値は知らせない）



Ａプール　４００㎡　５０人
Ｂプール　３２０㎡　４０人

この図を提示すると、子供たちは、最初、視覚的にＢプールの方がこんでいると判断した。

Ｔ：そうすると、ＡプールとＢプールのこんでいるっていう見方が今違うんだけども、この何を調べればこんでいるってはっきり言える。何がわかればどっちがこんでいるか比べられる？

Ｃ：数。

Ｔ：数、何の数？

Ｃ：人の数。（板書する）

人数という指標で比べるとＡプールの方がこんでいることになってしまい、子供たちは、他の指標として面積について意識し始めた。

Ｃ：プールの面積がちっちゃいから。

T：面積が…。

C：ちっちゃいから。

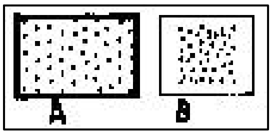
C：ちっちゃいから、だめ。これ人数で比べちゃだめ。

C：だって、面積が違うから。

　この状況は人数も面積も共に違っていることから、導入で用いた図を設定することで、平林の観点①「異なる２つの量があって、どちらか一方では比べられない状況があること」が実現する可能性が実証され、子供たちが気づきにくい「面積」を意識させることができた。その後、「面積が違うよ」という子供たちの意見からこのままでは比べることができないという意図を汲み、教師の「面積が違うからだめか、じゃあ、面積が同じだったら、人数で比べてもいい？」という発問に対して、児童は多数合意する。その後、教師はこの合意を確かめるために簡単な例を出題し、面積が同じ時には人数の大小でこみぐあいを比べられることが受け止められた。このように、平林の観点②「どちらか一方を揃えなければならないこと」は、観点①を実現することで、その解決策として導かれていった。従って、観点②を実現させるためには、いかに観点①を実現するかによると考えられる。

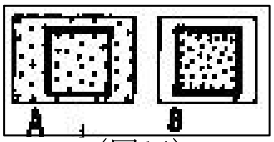
7.2.1.2　平林の観点③の実現

　平林の観点③「揃える量は任意でよいこと」は、観点②の次に「均等化」という大きな局面を経て、初めて形成される概念であった。児童は、理想的に均等化されていない状況で、こみぐあいを比べる際に、面積を表す枠の大きさをを変えたり、その枠を移動することで、こみぐあいが定まらないことから、均等化の必要性を認識していった。それは以下の３つの場面である。



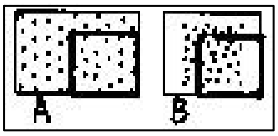
Aプールの大きな枠でこみぐあいを比べるとAプールがこんでいるという状況

〈図13〉



〈図14〉

Bプールの小さな枠でこみぐあいを比べるとBプールがこんでいるという状況

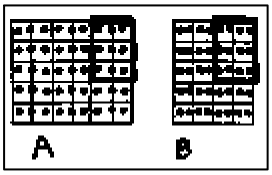


〈図15〉

同じBプールの小さな枠でも枠の位置を移動させることによって、今度はAプールがこルがこんでいるという状況

　また、観点①を実現させるために用いた２つの図のドットの分布状況の違いもまた、均等化する状況を意識させるために必要な要因であった。３番目の状況では、児童は、ドットが一箇所に固まって分布しているＢプールでは枠を動かすことでこみぐあいが違ってしまうことを経験し、ドットを均等化させなければならないことを想起したのである。

　そして、観点③を実現させるためには、マスのある図といろいろな大きさの面積を表す枠を用いることで、その枠をどこに置いても中の人数が変わらないことを意識させることができ、子供たちの理解が容易になったといえる。

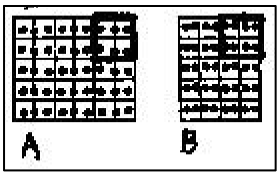


6㎡の枠でこみぐあいをはかる

9人＜12人で

Bプールがこんでいる

〈図16〉



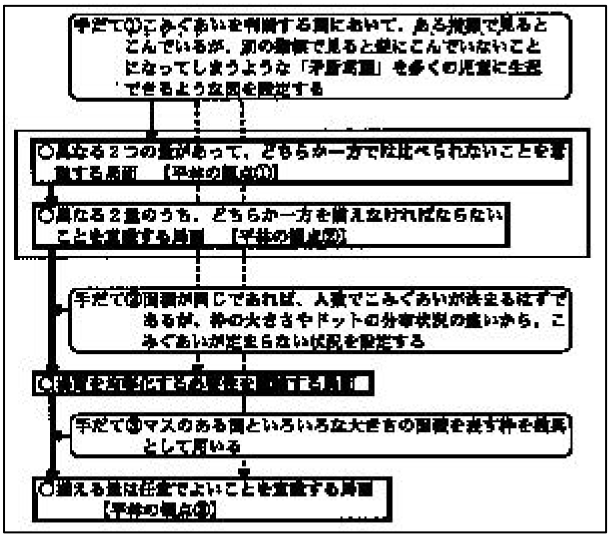
4㎡の枠でこみぐあいをはかる

6人＜8人で

Bプールがこんでいる

〈図17〉

　以上の局面と手だてをまとめたものが次の図式である（図18）。



〈図18：こみぐあいの授業プロセス〉

7.2.2　児童の数学的道具の発達

本授業は、道具と場面との間の相互作用を通して、数学的道具としての割合概念が形成されていく過程として、最もよく特徴づけられると思われる。

子供たちは、こみぐあいを人数という道具でとらえる傾向があることが調査から示唆されていたが、この授業でもまずそうした考えが子供たちの中に生起する。

T：そうすると、Aプールと Bプールのこんでいるっていう見方が今違うんだけども、この何を調べればこんでいるってはっきり言える。何がわかればどっちがこんでいるか比べられる？

C：数。

T：数、何の数？

C：人の数。（板書する）

そして、その道具で場面をとらえる際にその考えが通用しないことがあることを意識し、人数と面積というこみぐあいを表現する数学的道具の構成要素（道具をつくる材料）が生まれる。

C：面積が違うよ。（多数）

C：面積、面積。

さらに、それらを適応させて、何とか場面を捉えようとするがうまくいかず、今度は場面を変化させ、均等化させることを試みようとする。

T：中心に集まっているから。この点が中心に集まっているからだね。じゃあ、どこの場所でも比べられるようにするにはどうしたらいい？はい。小川君。

C：Bプールの中心に集まっている点をバラバラにする。

C：Aプールみたいに散らせばいいよ。

このように場面と道具の相互作用の中で、子供のアイデアが発達していった。そして、このアイデアの発達の特徴的な段階が以下の６つ見いだされた。

Ⅰの段階　こみぐあいを「人数」だけでとらえる
Ⅱの段階　こみぐあいを「人数」と「面積」でとらえる
Ⅲの段階　こみぐあいを「面積」が同じ時に「人数」でとらえる
Ⅳの段階　場面を均等化して、こみぐあいを人数と任意の面積でとらえる
Ⅴの段階　こみぐあいを「人数」と単位量の「面積」でとらえる
Ⅵの段階　こみぐあいを「人数」÷「面積」の除法でとらえる

以上の６つの段階がシチュエーションと教師の手だてによって、高まっていった様子が次々ページ図 19 である。

7.2.3　道具としての概念形成を決定づける重要な局面

本稿において、道具としての概念形成を振り返り、それを決定づける局面について再度考察する。それは、次の点である。

◎こみぐあいを比べるのに必要な条件として、均等化を意識させること、また、均等化の質について議論をすること

これを端的に言えば、均等化の場面が、割合の概念形成において本質的であったということである。その理由は、均等化の場面を通して、子供たちに割合が使える状況や条件というものを意識させることができたということである。子供たちの活動は道具をつくっていくことが主であったが、その道具が使える

ように場面も変化させていくことで、道具と場面との相互作用により、子供たちのアイデアが発達していった。教科書を始め、はじめから均等化されている場面では、ならすことの意味や、割合がどういうところで使えるのか、また、使えないのか、十分に意識できないまま進んでしまう可能性がある。

H.Blumer（1991）は、概念を道具としてとらえ、概念の道具的な性質について述べている。そこでは、概念が洗練されていくことにより、その機能の性格は以下のように変化していくことを示している。

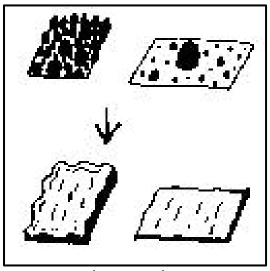
一つ目に、それがどのような範囲で働くのかが、いっそうはっきりと理解されるようになること。

二つ目に、それが持つ可能性も、より正確に測定されること。

三つ目に、それを使用した結果は、いっそう安全なものになること。

ここで、もう一度、筆者の授業を顧みる。こみぐあいの授業を一通り終えた、３時間目の人口密度の学習でのことである。

北海道と埼玉県をイメージした粘土の固まりを用いて、その粘土をつぶして平らにし、偏りをなくすということを実演した。具体的には、北海道の札幌という大都市を例に、札幌１つを取り上げれば、埼玉のどの都市よりも人口が極めて多いが、それをならすことにより、全体で見ると埼玉県の方が北海道よりも人口密度が多いことになってしまうことを取り上げた。「ああ、なるほど！」（3179）、「そうか！」（3180）に見られるように子供たちの反応は粘土をつぶす様子を真剣な面もちで見つめ、この「人口密度」の一連の学習と前時までのドットの分布に偏りがあるＢプールをならすという活動がある種の感動と共につながったことを示唆している。これらの事実は、割合というものを適応すること、そして、どのような範囲で適応するのかということが子供たちにとって、はっきり理解し始めた契機となる経験であったといえる。今後、子供たちは、この経験で獲得された概念をどう使うかに関する意識が、新しい状況で道具的に役立つことと思われる。



〈図20〉

8　今後の課題

今後の課題として､次の３点が挙げられる。

(1)複雑な調査方法を単純なものに整理し、実用化可能なものに洗練すること。

(2)調査対象を増やし、調査結果のより一般的な傾向を把握すること。

(3)実験授業を他のクラスや他の領域でも行い、手だての有効性を検証すること。

【引用・参考文献】

Singer,Ｊ.S.andResnick,L.B.（1992）.Representations of Proportional Relationships：Are Children Part-Part or Part-WholeReasoners. *Educational Studies inMathematics* **23**.231-246.

石塚博．(1990)．「平均」のよさを十分に味わわせよう．算数教育,412,16-20．明治図書.

小林智．(1995)．分数概念における認知的葛藤に関する研究．上越教育大学大学院学校教育研究科修士論文（未公刊).

新堀栄．(1999)．数学的道具としての割合の概念形成を目指した教材構成の研究．上越数学教育研究．14, 129-136.

中島健三．(1981)．異種の２量の割合と速さ．新しい算数研究,127,2-5．東洋館出版社.

中島健三．(1985)．「異種の２量の割合」の指導の意義とその要点：－数学的な考えの育成のための、「新しい量」の創造の場として－．新しい算数研究,177, 2-5．東洋館出版社.

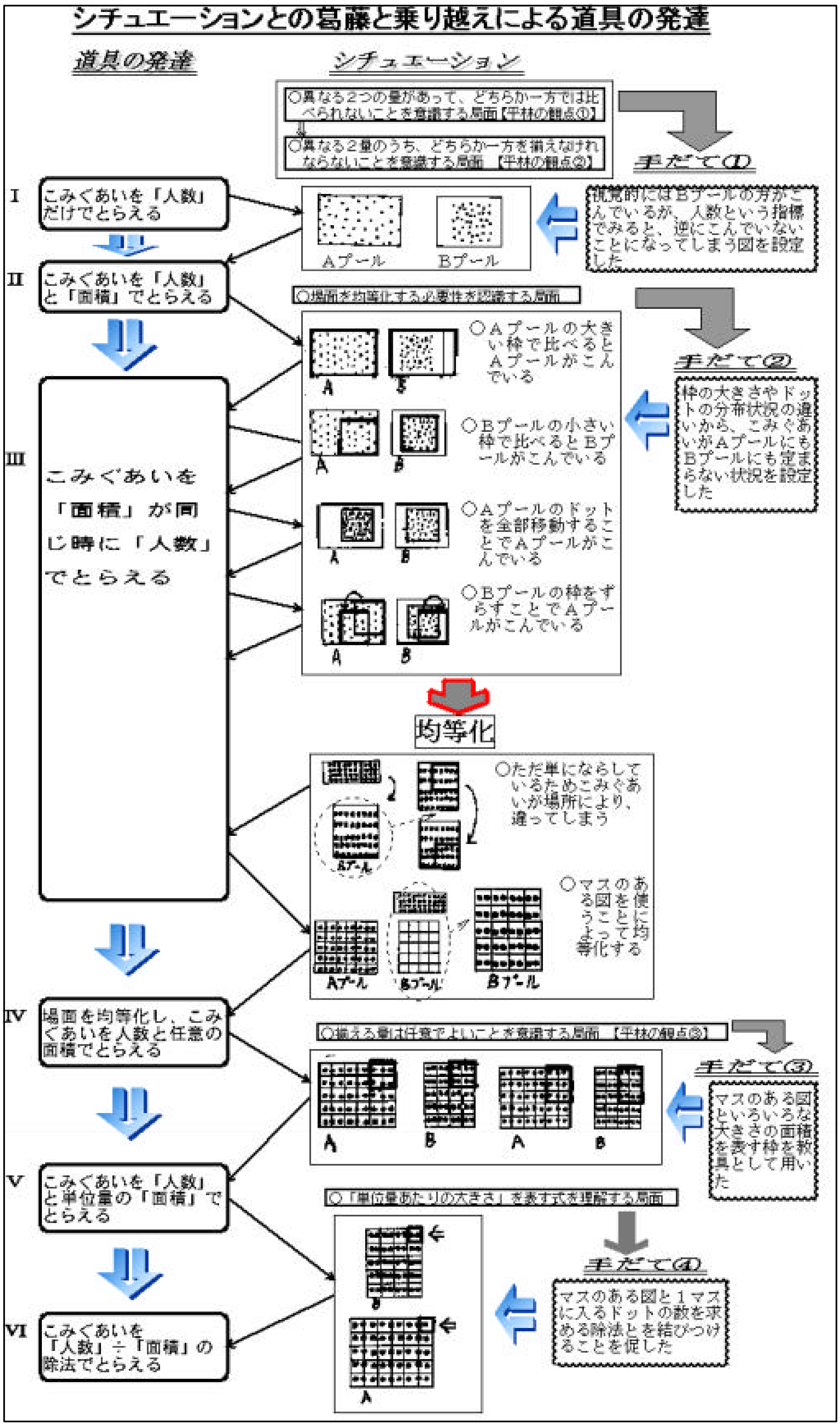
中原忠男．(1995)．算数・数学教育における構成的アプローチの研究．聖文社.

中村享史．(1999)．算数教育の改善の方向と実践的課題．日本数学教育学会誌,81,24-31.

広岡亮蔵．(1977)．ブルーナー研究．明治図書.

平林一榮．(1985)．授業を通してみた算数・数学の教育問題：小学校５年の「割合」を例に．西日本数学教育学会　第２回例会発表要項

ブルーマー．(1991)．シンボリック相互作用論パースペクティヴと方法(後藤将之訳)．勁草書房.


シチュエーションとの葛藤と乗り越えによる道具の発達
道具の発達
シチュエーション
○異なる２つの量があって、どちらか一方では比べられないことを意識する局面【平林の観点①】
○異なる２量のうち、どちらか一方を揃えなければならないことを意識する局面　【平林の観点②】
手だて①
Ⅰ
こみぐあいを「人数」だけでとらえる
Aプール
Bプール
視覚的にはBプールの方がこんでいるが、人数という指標でみると、逆にこんでいないことになってしまう図を設定した
Ⅱ
こみぐあいを「人数」と「面積」でとらえる
○場面を均等化する必要性を認識する局面
手だて②
○Aプールの大きい枠で比べるとAプールがこんでいる
○Bプールの小さい枠で比べるとBプールがこんでいる
○Aプールのドットを全部移動することでAプールがこんでいる
○Bプールの枠をずらすことでAプールがこんでいる
枠の大きさやドットの分布状況の違いから、こみぐあいがAプールにもBプールにも定まらない状況を設定した
Ⅲ
こみぐあいを「面積」が同じ時に「人数」でとらえる
均等化
○ただ単にならしているためこみぐあいが場所により、違ってしまう
○マスのある図を使うことによって均等化する
Aプール
Bプール
Ⅳ
場面を均等化し、こみぐあいを人数と任意の面積でとらえる
○揃える量は任意でよいことを意識する局面　【平林の観点③】
手だて③
マスのある図といろいろな大きさの面積を表す枠を教具として用いた
Ⅴ
こみぐあいを「人数」と単位量の「面積」でとらえる
○「単位量あたりの大きさ」を表す式を理解する局面
手だて④
マスのある図と１マスに入るドットの数を求める除法とを結びつけることを促した
Ⅵ
こみぐあいを「人数」÷「面積」の除法でとらえる

〈図19〉